力学ICD演習解答例

演習5

1.　等方的な３次元調和振動子の復原力は $\mathbf{F} = -k\,\mathbf{r}$ と書ける。このとき、ポテンシャルは

$$U(r) = \frac{1}{2}k\,\mathbf{r}^2 = \frac{1}{2}k\,(x^2 + y^2 + z^2)$$

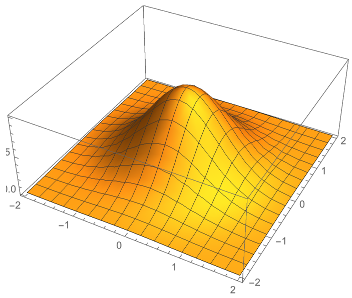
　となる事を、演習４の(3-3-15)式から出発して求めよ。（$\mathbf{F} = -k\,\mathbf{r}$ は中心力である事に注意）。

（**解答例**）

$\mathbf{F} = -k\,\mathbf{r} = -k\,r\,\dfrac{\mathbf{r}}{r}$ なので、復原力は中心力であり、$f(r) = -k\,r$ と書ける。

よって、基準点 r_0 を0とすれば、(3-3-15)式は　$U(r) = -\displaystyle\int_{r_0}^{r} f(r)\,dr = -\int_0^r (-k\,r)\,dr = k\int_0^r r\,dr = \frac{k}{2}r^2$　となる。

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ なので、$U(r) = \dfrac{1}{2}k\,(x^2 + y^2 + z^2)$ が得られた。



２. 右の図のような２次元ポテンシャル$U(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-\mathbf{r}^2}$ が与えられたとする。

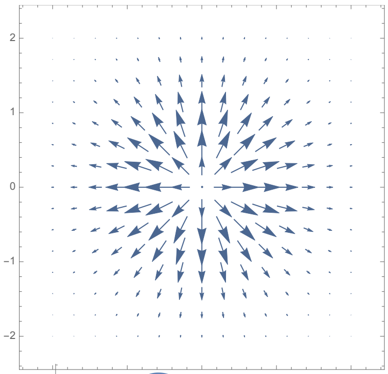
(1) 対応する力の場、

$$\mathbf{F}(x, y) = -\,\mathrm{grad}\ U(x, y) = -\left(\frac{\partial U(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}\right) \qquad (3\text{-}4\text{-}26)$$

を求め、その概略をスケッチしなさい。

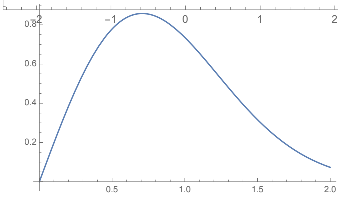
（**解答例**、解説）

$\mathbf{F}(x, y) = -\,\mathrm{grad}\ U(x, y) = (2x\,e^{-(x^2+y^2)},\ 2y\,e^{-(x^2+y^2)})$　（演5-1）



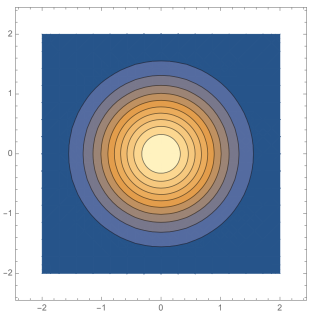
このベクトル場を右図（上から２番目の図）に示した。横がx軸方向、縦がy軸方向としている。図の中心が原点。

　　　元の曲面を頂点からx軸正の方向に沿って動くと、x軸上の点は常にy＝０なので、力のベクトルは（演5-1）式より、$\mathbf{F}(x, 0) = (2x\,e^{-x^2}, 0)$ となるから、常にy成分は０で正のx成分のみを持っている。（すなわち、力は常にx軸正の方向を向く）。その大きさは、xとともに $2x\,e^{-x^2}$と変化する。これは、x＝０で０、x＞０ではxとともに次第に大きくなり、ある点で極大をむかえた後、また小さくなるような関数である（右図（上から３番目の図）を見よ。横軸はx、縦軸は$2x\,e^{-x^2}$）。原点（頂点）から対称的な中心力の場になっている。これは、$\mathbf{F} = 2r\,e^{-r^2}\dfrac{\mathbf{r}}{r}$ と書き直してみればわかる。



(2) ポテンシャルの曲面の傾きを調べ、力との関係を幾何学的に考察しなさい。

（図のポテンシャル面の等高線（ポテンシャルの値がある一定の大きさになる所を描いた等ポテンシャル線で、ポテンシャルのある大きさ間隔で書いたもの）をスケッチし、<u>力のベクトルは常に等ポテンシャル線に垂直</u>である事を確かめよ。）



(**解答例**、解説）ポテンシャル曲面は頂点で傾きは０であるが、どの方向にも下りになっていて、その傾きは次第に大きく（急に）なり、その後、小さく（緩やかに）なっている。図は、力のベクトルがこれに対応して、ポテンシャル曲面の最急斜面を下る方向を向き、その大きさは、元の曲面の傾斜（傾き）とともに変わっている事を示している。このポテンシャルの等ポテンシャル線（等高線）を右図（上から４番目の図）に示した。対称性から、その等高線は頂点を原点とする円になるが、等高線の間隔は一定ではない。頂点付近では、その間隔は広いが、次第に詰まっていき（ここが傾斜が急）、その後、また広がっていく（傾斜が緩やかになる）。この図と、上から２番目の力の場を比較すると、力のベクトルは常に等高線に垂直になっている事がわかる。

３. 万有引力のポテンシャル式(3-2-13)は、直交座標では$r=|\mathbf{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ なので、

$$U(x,y,z)=-\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (3\text{-}4\text{-}27)$$

と書ける。この時、$\mathbf{F}(x,y,z)=-\mathrm{grad}\ U(x,y,z)=-\left(\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x},\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y},\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\right)$を直接計算して、

$\mathbf{F}(\mathbf{r})=-\frac{GMm}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$ となることを示しなさい。

（解答例）

$$F_x=-\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(-GMm(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right)=-GMm\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x$$

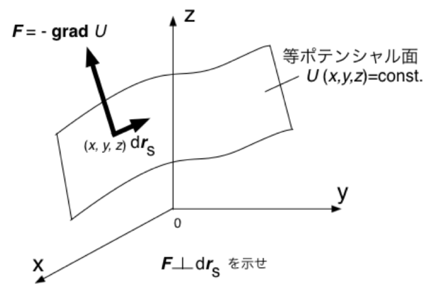
$$=-GMm\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=-\frac{1}{2}\frac{GMm}{r^2}\frac{2x}{r}=-\frac{GMm}{r^2}\frac{x}{r}$$

同様にして、y成分、z成分は $F_y=-\frac{GMm}{r^2}\frac{y}{r},\ \ F_z=-\frac{GMm}{r^2}\frac{z}{r}$ となる。これらをまとめてベクトルの記号で書けば、

$\mathbf{F}(\mathbf{r})=-\frac{GMm}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$ となる。

４. 等ポテンシャル面、$U(x,y,z)=$ 一定 、の上にある点 (x,y,z) から面上にそって動く微小なベクトル $d\mathbf{r}_s$と、その点での力のベクトル、$\mathbf{F}(x,y,z)=-\mathrm{grad}\ U(x,y,z)$、は垂直であることを示しなさい。これは、保存力は常に等ポテンシャル面に垂直の方向を向いていることを意味する。

（注）問題２の(2)では、この結論の２次元での場合の例を示している。



（解答例）$d\mathbf{r}_s$ は等ポテンシャル面上での任意のベクトルであるから、

$\mathbf{F}\perp\mathbf{r}_s$ （すなわち、$\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}_s=0$）である事を言えば良い。

$d\mathbf{r}_s=(dx,dy,dz)$ とすると、

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}_s=-\mathrm{grad}\ U\cdot\mathbf{r}_s=-\left(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z}\right)(dx,dy,dz)=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz\right)=-dU=0$$

最後のところで全微分 dU=0 となるのは、等ポテンシャル面（Uが一定で、その面上で動き回ってもUの変化が無い面）の上に沿って、今、無限小距離 $d\mathbf{r}_s$ 動くので、当然、そのUの変化（全微分 dU）は０となるからである。

よって、常にスカラー積 $\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}_s=0$ なので、$\mathbf{F}\perp\mathbf{r}_s$ となり、保存力は常に等ポテンシャル面に垂直の方向を向いている事が証明された。